BÀI TOÁN (ví dụ trang 8)

Cho trường lực:

$$\vec{F}(x, y, z) = (2,\ 3y,\ 4z^2)$$

Vật chuyển động từ:

$$A(1, 1, 1) \quad \text{đến} \quad B(1, 0, 0)$$

Yêu cầu: Tính công của lực:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

BƯỚC 0 – Nhận diện bài toán

Đây là tích phân đường loại 2 trong không gian (3D).

Dạng tổng quát:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Trong đó:

$$P = 2, \quad Q = 3y, \quad R = 4z^2$$

Đề không cho đường đi C. Phản xạ đúng: kiểm tra xem trường có bảo toàn không → dùng Newton–Leibniz 3D.

BƯỚC 1 – Viết lại tích phân dưới dạng chuẩn

Từ:

$$\vec{F} = (2, 3y, 4z^2)$$

Ta có:

$$W = \int_C 2\,dx + 3y\,dy + 4z^2\,dz$$

BƯỚC 2 – Kiểm tra trường có bảo toàn không

Điều kiện trường bảo toàn trong $\mathbb{R}^3$: Một trường $\vec{F} = (P, Q, R)$ là bảo toàn nếu:

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

Tức là:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Tính từng đạo hàm:
- Cặp 1: $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial(4z^2)}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial(3y)}{\partial z} = 0$. Bằng nhau.
- Cặp 2: $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial(2)}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial(4z^2)}{\partial x} = 0$. Bằng nhau.
- Cặp 3: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(3y)}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(2)}{\partial y} = 0$. Bằng nhau.

Kết luận: $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. $\Rightarrow$ Trường bảo toàn. $\Rightarrow$ Tồn tại hàm thế $\varphi(x, y, z)$ sao cho:

$$\nabla\varphi = \vec{F}$$

BƯỚC 3 – Tìm hàm thế $\varphi(x, y, z)$

Theo định nghĩa:

$$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (2, 3y, 4z^2)$$

Tức là:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2 \quad (1) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3y \quad (2) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 4z^2 \quad (3) \end{cases}$$

BƯỚC 3.1 – Giải phương trình (1)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2$$

Tích phân theo x:

$$\varphi = \int 2\,dx = 2x + A(y,z)$$

BƯỚC 3.2 – Dùng phương trình (2)

$$\varphi = 2x + A(y,z)$$

Lấy đạo hàm theo y:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y}$$

Theo (2):

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3y$$

Tích phân theo y:

$$A(y,z) = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

BƯỚC 3.3 – Dùng phương trình (3)

$$\varphi = 2x + \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

Lấy đạo hàm theo z:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = B'(z)$$

Theo (3):

$$B'(z) = 4z^2$$

Tích phân:

$$B(z) = \int 4z^2\,dz = \frac{4}{3}z^3$$

Hàm thế cuối cùng

$$\varphi(x, y, z) = 2x + \frac{3}{2}y^2 + \frac{4}{3}z^3$$

BƯỚC 4 – Áp dụng Newton–Leibniz (3D)

Công thức:

$$W = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Tính tại điểm cuối $B(1, 0, 0)$:

$$\varphi(1, 0, 0) = 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 + \frac{4}{3} \cdot 0^3 = 2$$

Tính tại điểm đầu $A(1, 1, 1)$:

$$\varphi(1, 1, 1) = 2 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \frac{4}{3} \cdot 1^3 = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{29}{6}$$

Lấy hiệu:

$$W = 2 - \frac{29}{6} = -\frac{17}{6}$$

KẾT LUẬN CUỐI

$$W = -\frac{17}{6}$$

BƯỚC 3.2 – CỰC KỸ, CỰC CHẬM

Sau bước 3.1, ta có:

$$\varphi(x, y, z) = 2x + A(y, z)$$

Phần $2x$ đã xử lý xong. Phần $A(y, z)$ là toàn bộ phần còn thiếu, chỉ phụ thuộc y và z.

Đề cho:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3y$$

Do đó:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 3y$$

Giải tích phân:

$$A(y,z) = \int 3y\,dy = \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

BƯỚC 3.3 – CỰC KỸ, CỰC CHẬM

Ta có:

$$\varphi(x,y,z) = 2x + \frac{3}{2}y^2 + B(z)$$

Đề cho:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 4z^2$$

Do đó:

$$B'(z) = 4z^2$$

Giải tích phân:

$$B(z) = \int 4z^2\,dz = \frac{4}{3}z^3$$

TÓM TẮT ĐÚNG 5 DÒNG (HỌC THUỘC)

1. Không cho đường $\rightarrow$ nghĩ Newton–Leibniz
2. Kiểm tra bảo toàn
3. Tìm hàm thế (x $\rightarrow$ y $\rightarrow$ z)
4. Lấy điểm cuối trừ điểm đầu
5. Xong